**DST Mathématiques**

**Durée : 1 h 45**

*Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.*

*Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.*

**EXERCICE 1 :**

Une entreprise agroalimentaire fabrique des arômes naturels servant à l’amélioration des préparations culinaires. Elle les conditionne dans des flacons de 58 ml qu’elle achète à l’entreprise EmballTout.

**Partie A : Etiquetage**

Une fois fabriquées les étiquettes peuvent présenter deux défauts : un défaut du visuel (graphisme, photo, couleur …) ou l’absence de la date limite de consommation.

On considère les évènements suivants :

• A « la date limite de consommation n’apparaît pas sur l’étiquette » avec p (A) = 0.01

• D « l’étiquette comporte un défaut visuel » avec p (D) = 0.03

On suppose que les évènements A et D sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu’une étiquette prélevée au hasard dans la production présente les deux défauts
2. Montrer que la probabilité qu’une étiquette prélevée au hasard dans la production ne présente aucun des deux défauts est 0,9603

**Partie B : Etude de lots d’étiquettes**

On prélève au hasard dans la production de l’entreprise un lot de 100 étiquettes.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d’étiquettes de ce lot présentant au moins un des deux défauts. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité : ( à 10 -3 )

* Qu’au plus 2 étiquettes présentent au moins un défaut.
* Que plus de 10 étiquettes présentent au moins un défaut
* Qu’il y ait entre 3 et 15 étiquettes présentent au moins un défaut.

**Partie C : Etude de la contenance**

Dans cette partie les résultats seront arrondis, si nécessaire, au centième.

On définit une variable aléatoire V associant à chaque flacon son volume utile exprimé en ml.

On suppose que V suit la loi normale de moyenne = 58 (valeur annoncée par le fournisseur) et d’écart type = 0,04.

Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque ce volume appartient à l’intervalle [ 57,90 ; 58,10 ]. On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu’il soit conforme.
2. Donner la valeur du réel h tel que P ( 58 – h ≤ V ≤ 58 + h ) = 0,95.

**EXERCICE 2 :**

On s’intéresse à une maladie dégénérative de l’œil qui occasionne des troubles de la vision. Afin de freiner son évolution, deux traitements sont possibles. Dans cet exercice, on étudie, pour ces deux traitements, l’évolution de la quantité des principes actifs présents dans le sang en fonction du temps.

**Partie A : Etude du premier traitement**

Le premier traitement consiste à faire absorber par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure à 5 mg. On admet qu’à l’instant  = 0 la quantité de ce principe actif dans le sang est de 1 mg.

1. *Résolution d’une équation différentielle*

L’évolution en fonction du temps (exprimé en heures) de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par une fonction vérifiant l’équation différentielle :

( E ) :

Où est une fonction de la variable , définie et dérivable sur [ 0 ; + ∞ [ et la dérivée de la fonction .

1. Déterminer les solutions sur [ 0 ; + ∞ [ de l’équation ( H ) : 
2. Soit la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par . Vérifier que la fonction est une solution de ( E )
3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle ( E )
4. Déterminer la solution de ( E ) correspondant au problème posé.
5. *Etude d’une fonction*

Soit la fonction définie pour tout  de l’intervalle [ 0 ; + ∞ [ par .

1. On admet que la limite de en + ∞ est 0. Interpréter graphiquement cette limite
2. Déterminer, dérivée de la fonction puis étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de  sur [ 0 ; + ∞ [.
4. Applications :

* Au bout de combien de temps la quantité de principe actif sera-t-elle maximale ?
* On donne :



Déterminer la quantité moyenne de principe actif présente dans le sang entre 0 et 24 h. Arrondir au dixième.

**Partie B : Etude statistique du second traitement**

Le second traitement consiste à injecter par intraveineuse un médicament qui permet une meilleure vascularisation des vaisseaux sanguins de la rétine.

A l’instant  = 0, on injecte une dose de 1.8 mg de médicament, appelée dose de charge. On suppose que ce procédé diffuse instantanément dans le sang le principe actif qui est ensuite progressivement éliminé par les reins.

Après avoir injecté la dose de charge on décide d’administrer ce médicament à l’aide d’une pompe de manière continue afin de réduire le plus possible les oscillations de la quantité de principe actif dans le sang.

L’étude consiste à déterminer l’état stationnaire (qui est atteint lorsque la différence entre la quantité limite, estimée à 36 mg, et la quantité présente dans le sang est inférieure à 1 mg) pour ce médicament.

On effectue sept mesures pendant 24 h et on obtient les relevés suivants, où  désigne la quantité en mg de principe actif dans le sang à l’instant .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
|  | 1.8 | 9.5 | 15.5 | 20.2 | 23.7 | 26.8 | 28.7 |

Un ajustement affine n’étant pas judicieux, on décide de procéder à un changement de variable.

On pose 

1. Recopier et compléter le tableau suivant au centième

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
|  | 3.53 |  |  |  |  |  |  |

1. Déterminer une équation de la droite de régression de en . Arrondir les coefficients au centième.
2. En déduire une expression de la quantité en fonction de .
3. Un médecin affirme que l’état stationnaire est atteint en moins de trois jours. Quel argument peut-il fournir pour justifier cette affirmation ?

**EXERCICE 3 :**

*Loi normale exercice d’application des notions vues en cours*

On considère la variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne 100 et d’écart-type 10.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10 – 4 ) :
2. P ( 90 ≤ X ≤ 115 )
3. P ( X ≤ 120 ) et P ( X ≥ 80 ). Que constatez-vous ? Expliquez
4. Déterminer ( arrondir à l’entier)  tel que :
5. P ( X ≤  ) = 0.8413
6. P ( 90 ≤ X ≤  ) = 0.5
7. P ( X ≥  ) = 0.0332
8. P (  ≤ X ≤ 108 ) = 0.2113
9. P ( -  ≤ X ≤  ) = 0.3828